الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية عند إجراء العمليات الحسابية:

أ- الجمع: إن الخطأ المطلق عند جمع عدة أعداد تقريبية لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة عند حسابا كل عدد فإذا كان لدينا:

$$Z = Z_1 + \text{———} + Z_n$$

$$\Delta Z_1 , \text{———} , \Delta Z_n$$

فإن $\Delta_Z \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta Z_i$

أما الخطأ النسبي: $\delta_Z \leq \frac{\Delta_Z}{|Z_1 + \text{—} + Z_n|}$

ب- الطرح: إذا كان: $Z = Z_1 - Z_2$

$\Delta Z_1 , \Delta Z_2$

فإن: $\Delta_{Z_1 - Z_2} \leq \Delta_{Z_1} + \Delta Z_2$ الخطأ المطلق

أما الخطأ النسبي: $\delta_{Z_1 - Z_2} \leq \frac{\Delta_{Z_1 - Z_2}}{|Z_1 - Z_2|}$

ج- الضرب: إذا كان: $Z = Z_1 \cdot Z_2$

فإن الخطأ المطلق: $\Delta_{Z_1 \cdot Z_2} \leq |Z_1| \cdot \Delta_{Z_2} + |Z_2| \cdot \Delta_{Z_1}$

$$\Delta_{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3} \leq |Z_1 \cdot Z_2| \cdot \Delta_{Z_3} + |Z_1 \cdot Z_3| \cdot \Delta_{Z_2} + |Z_2 \cdot Z_3| \cdot \Delta_{Z_1}$$

بشكل عام: $\Delta_{Z_1 \cdots Z_n} \leq \Delta Z_1 |Z_2 \cdots Z_n| + \Delta Z_2 |Z_1 \cdot Z_3 \text{———} Z_n| + \text{———} + \Delta Z_n |Z_1 \cdot Z_2 \text{———} Z_{n-1}|$

أما الخطأ النسبي: $\delta_{Z_1 \text{—} Z_n} \leq \frac{\Delta Z_1 \text{—} Z_n}{|Z_1 \text{—} Z_n|}$

٤. **القسمة:** إذا كان $Z = Z_1/Z_2$

الخطأ المطلق: $\Delta_{Z_1/Z_2} \le \frac{\Delta Z_1}{Z_2} + \Delta Z_2 \frac{|Z_1|}{Z_2^2}$

الخطأ النسبي: $\delta_{Z_1/Z_2} \le \frac{\Delta_{Z_1/Z_2}}{|Z_1/Z_2|}$

مثال: ليكن لدينا العددان المدوران التاليان:

$Z_1 = -1,5$

$Z_2 = 3,14$

والمطلوب: ١. أوجد الخطأ المطلق والنسبي عند تدوير هذان العددان.

٢. " " " إجراء العمليات الأربعة (+، -، ×، ÷)

أ- باعتبار العددان مدوران مقربان فإن القيمة الحقيقية لها مجهولة فإن الخطأ المطلق أثناء تدوير العدد المطلق:

$\Delta Z_1 \le 5\times10^{-2}$ و $\Delta Z_2 \le 5\times10^{-3}$

⇐

وبالتالي الخطأ النسبي: $\delta_{Z_1} = \frac{\Delta Z_1}{|Z_1|} = \frac{5\times10^{-2}}{1.5} =$

$\delta_{Z_2} = \frac{\Delta Z_2}{|Z_2|} = \frac{5\times10^{-3}}{3.14} =$

ملاحظة: في الدساتير السابقة إذا لم تكن القيمة الحقيقية معلومة نستبدلها بالقيمة التقريبية.

ملاحظة: لو كان العددان مفروضان
$Z_1 = -1,52$ و $Z_2 = 3,139$
$\tilde{Z}_1 = -1,5$ ، $\tilde{Z}_2 = 3,14$
$\Delta Z_1 = |Z_1 - \tilde{Z}_1| = 0,02$
$\Delta Z_2 = |Z_2 - \tilde{Z}_2| = 0,001$
وبالتالي:
$\delta_{Z_1} = \frac{0,02}{|1,52|} =$
$\delta_{Z_2} = \frac{0,001}{|3,139|} =$

٢. $\Delta_{Z_1+Z_2} \le \Delta_{Z_1} + \Delta_{Z_2} = 5\times10^{-2} + 5\times10^{-3} = 0,055$

$\delta_{Z_1+Z_2} \le \frac{\Delta_{Z_1+Z_2}}{|Z_1+Z_2|} = \frac{0,055}{|-1,5+3,14|} =$

• بالطرح:

$$\Delta_{z_1-z_2} \le \Delta z_1 + \Delta z_2 = 0,055$$

$$\delta_{z_1-z_2} \le \frac{\Delta_{z_1-z_2}}{|z_1-z_2|} = \frac{0,055}{|-1,5-3,14|} = \frac{0,055}{4,64} =$$

• الضرب:

$$\Delta_{z_1 \cdot z_2} \le \Delta z_1 |z_2| + \Delta z_2 |z_1|$$
$$= 5\times10^{-2}|3,14| + 5\times10^{-3}|-1,5| = c_3$$

$$\delta_{z_1 \cdot z_2} \le \frac{\Delta_{z_1 \cdot z_2}}{|z_1 \cdot z_2|} = \frac{c_3}{|(-1,5)(3,14)|} = c_4$$

• القسمة:

$$\Delta_{z_1/z_2} \le \frac{\Delta z_1}{|z_2|} + \Delta z_2 \cdot \frac{|z_1|}{z_2^2} \le \frac{5\times10^{-2}}{|3,14|} + 5\cdot10^{-3} \cdot \frac{|-1,5|}{(3,14)^2} = c_5$$

$$\delta_{z_1/z_2} \le \frac{\Delta z_1/z_2}{|z_1/z_2|} = \frac{c_5}{|-1,5/3,14|}$$

وظيفة: تمرين 1: ليكن عددان: $\begin{cases} z_1 = 1,5525 \\ z_2 = -3,14738 \end{cases}$

المطلوب: 1- دور هذين العددين مرتبة عشرية واحدة ثم مرتبتين عشريتين ثم ثلاثة مراتب عشرية واحسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في كل مرة.

2- أوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند إجراء العمليات الحسابية على هذان العددان بعد التدوير مرتبة عشرية واحدة.

محتوى الفصل الثاني

تقريب الدوال بكثيرات الحدود:

الاستيفاء: هو عملية استبدال دالة بكثيرة حدود ذات قيمة صحيحة بالنسبة لـ x معينة منها بهدف تمكيننا إجراء العمليات الرياضية من تفاضل وتكامل و حساب مشتقات...

- إضافة إلى ذلك: في معظم الأحيان تكون الدوال ذات صيغة تحليلية معقدة لا يمكن إجراء العمليات السابقة عليها التكامل مثلاً يمكن إجراؤه فقط عندما تكون الدالة $y = f(x)$ دالة أصلية ومن المعلوم أن الدوال قد صنفت ضمن مجموعات فهو كل مجموعة طريقة لتكاملها أو تفاضلها وبالتالي هناك مجموعة غير منتهية ليس لها دوال أصلية، وأثناء التقريب تلك الدوال نجري العمليات السابقة على كثيرات الحدود بدلاً من الدالة والنتيجة تكون قريبة من القيمة الحقيقية للتفاضل أو التكامل.
- كما أنه هناك العديد من الدوال تعطى بشكل جدولي أي قيم لـ x تقابلها قيم لـ y. وبالتالي الصيغة التحليلية مجهولة ولا يمكن إجراء أي من العمليات الرياضية على تلك الدوال في مثل هذه الحالات نلجأ إلى تقريب الدوال كما أنه من السهل وضع برنامج لتكامل الدوال لكن هنا لكل صنف من الدوال برنامجه الخاص بالطرائق التقريبية نضع برنامج للطريقة ولا نهتم بالدالة ويتم حساب النتائج بشكل أسرع من الطرائق العادية ويتم ذلك بالشكل التالي:

سوف نهمل الفرق ما بين الدالة وكثير الحدود أصفار.

النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ التي تتساوى فيها الدالة مع كثير الحدود نسميها نقاط الاستيفاء.

• علاقة الاستيفاء : $f(x) \cong P_n(x)$

• نقاط الاستيفاء : $f(x_i) = P_n(x_i)$

هناك طرائق متعددة للاستيفاء منها يعتمد على جداول الفروق ومنها لا يعتمد على جدول الفروق.

• الطرائق التي تعتمد على جداول الفروق:

أ- طريقة نيوتن - غريغوري "المباشرة":

تطبق هذه الطريقة عندما تكون المسافات بين نقاط الاستيفاء متساوية البعد:

$|x_{i+1} - x_i| = h$

- ونعتمد على جداول فروق تسمى: جداول الفروق المباشرة.

- جدول الفروق المباشرة:

بفرض لدينا مجموعة من النقاط:

$x_0, x_1 \text{ —— } x_n$

$y_0, y_1 \text{ —— } y_n$

نسمي الفروق المباشرة من المرتبة الأولى الفروق التالية.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \; ; \; \Delta y_1 = y_2 - y_1 \; ; \; \Delta y_2 = y_3 - y_2$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

عددها "n"

الفروق من المرتبة الثانية هي الفروق التالية:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$
$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n+1} + y_{n-2}$$

عددها "n-1"

أما الفروق من المرتبة الثالثة هي الفروق التالية:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

$$\Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}$$

} عددها "$n-2$"

- وهكذا نستمر حتى نحصل على الفروقات من المرتبة n والتي عددها = 1

← نلاحظ هنا أن الأمثال في هذه الفروقات هي أمثال منشور ثنائي الحد "نيوتن" أي أمثال مثلث باسكال:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

- لنكتب الآن جدول الفروق المباشر لعدد محدود من النقاط:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

ملاحظة:

إن عناصر جدول الفروق يمكن حسابها بعدة طرائق مساوية لعدد الأعمدة التي تشكل جدول الفروق.

لنعرف الآن:

لإيجاد كثيرة حدود استيفاء بطريقة نيوتن نعتمد على المبرهنة التالية:

مبرهنة 1:

لنفترض أن الدالة $y = f(x)$ قابلة الاشتقاق $(n+1)$ مرة متتالية على المجال $I=[x_0, x_n]$:

عند ذلك فإن العلاقة التي تربط الفروق المباشرة بالمشتقات من المرتبة n تكتب على الشكل التالي:

$$\Delta^{n+1} f(x) = h^{n+1} \cdot f^{n+1}(x)$$

$$\alpha \in I$$

$$\Rightarrow f^{n+1}(\alpha) = \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{h^{n+1}} \quad ; \quad h = |x_{i+1} - x_i|$$

• نبدل المشتقات الواردة في منشور تايلور بما يقابلها من الفروق المباشرة وفق المبرهنة السابقة نجد أن: كثير الحدود الاستيفاء بطريقة نيوتن غريغوري:

$$P_n(x_0) = y_0 + S \cdot \Delta y_0 + \frac{S(S-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!} \Delta^3 f_0 +$$

$$+ \cdots + \frac{S(S-1)\cdots[S-(n-1)]}{n!} \Delta^n f_0 \quad ; \quad S = \frac{x - x_0}{h}$$

• ملاحظة ٢:

لنفرض أن $y = f(x)$ قابلة الاشتقاق $(n+1)$ مرة متتالية على المجال I الذي يحوي نقاط الاستيفاء وبالتالي فإن خطأ الاستيفاء بشكل عام يعطى بالعلاقة التالية:

$$R(x) = |f(x) - P_n(x)| = \frac{w(x) \, f^{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}$$

نختار النقطة α ضمن المجال الذي يحوي نقاط الاستيفاء.

" عند نقاط الاستيفاء تكون النقاط مساوية للدالة والخطأ معدوم.

$$\max R(x) \leq \frac{w(x) \cdot \max f^{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}$$

• إذا كانت الدالة معلومة تحليلياً نشتق العدد الكافي من المرات "وهو يزيد عن درجة كثير الحدود الاستيفاء بعدد واحد فقط".

أما إذا لم تكن الدالة معلومة تحليلياً فإننا نستبدل المشتقة الوارد في عبارة الخطأ المركب بما يقابلها من جدول الفروق المباشرة وفق المرحلة السابقة.

- $W(x)$ هي عبارة عن:

$$W(x) = (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_n)$$

x هي القيمة المراد حساب قيمة الدالة عندها

$(x-x_0) \ldots (x-x_n)$ هي نقاط الاستيفاء.

مثال:

لتكن لدينا الدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	2	1	0	5

- اكتب جدول الفروق وأوجد كثير الحدود الاستيفاء بطريقة نيوتن المباشرة.
- أوجد قيمة تقريبية للدالة عندما $x=3$ واحسب الخطأ المركب.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	-3				
		5			
-1	2		-6		
		-1		6	
0	1		0		0
		-1		6	
1	0		6		
		5			
2	5				

ملاحظة:

إذا لم يطلب حساب كثيرة حدود استيفاء عند نقطة محددة فتكون x هي بداية الجدول

ويقابلها y_0 أما إذا طلب عند نقطة محددة فيجب الالتزام بتلك النقطة فتكون تلك النقطة هي x_0.

إن درجة كثيرة الحدود الاستيفاء يحددها عدد نقاط الاستيفاء مطروح منها العدد واحد وباعتبار $\Delta^4 y_i = 0$ ⇐ درجة كثيرة الحدود الاستيفاء من الدرجة الثالثة.

$$P_3(x_0) = f_0 + S.\Delta y_0 + \frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$S = \frac{x - x_0}{h} = x + 2 \quad , \quad h = 1$$

$$\Rightarrow P_3(x_0) = -3 + (x+2)5 + \frac{(x+2)(x+1)}{2!}(-6) + \frac{(x+2)(x+1).x}{6}(6)$$

$$= -3 + 5x + 10 - 3(x^2 + 3x + 2) + x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$= -3 + 5x + 10 - 3x^2 - 9x - 6 + x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$= x^3 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow f(3) \cong P_3(3) = 22$$

الخطأ المرتكب:

$$R(x) \leq \frac{w(x)\max f^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

$$R(x) \leq \frac{w(x)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4(y_i)}{h^4} = 0$$

الخطأ المرتكب معدوم وهنا تطابق كثيرة الحدود الاستيفاء مع الدالة.

ملاحظة:

لنفرض أن الفروق الأخيرة $\Delta^4 y_i \neq 0$ عند ذلك يحسب الخطأ المرتكب على الشكل التالي: ستكون درجة كثيرة الحدود الاستيفاء من الدرجة الرابعة والخطأ المرتكب سيكون فيه مشتق من المرتبة الخامسة وهنا نضيف نقطة لنهاية المجال 3 مثلاً.